**Tema: Trigonometría, funciones trigonométricas, graﬁcación de funciones trigonométricas.**

**Pantalla 1 (única)**

**Las razones trigonométricas.**

Diagrama

Descripción generada automáticamente con confianza bajaLos lados de un triángulo rectángulo se nombran de la siguiente manera; los que forman el ángulo recto se llaman catetos y el que es opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

Gráfico

Descripción generada automáticamenteAdemás, si se toma como referencia uno de los ángulos agudos del triángulo (α, en la figura), es posible distinguir los catetos; el que es opuesto al ángulo se llamará *cateto opuesto* y se denotará por CO y el que forma el ángulo con la hipotenusa se llamará *cateto adyacente* y se denotará por CA. La hipotenusa se denota por H.

Con los lados del triángulo se pueden formar seis razones y éstas se nombran de acuerdo con el ángulo elegido. Considerando la figura anterior se tiene la siguiente tabla.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nombre de la razón** | **Definición de la razón** |
| Seno |  |
| Coseno |  |
| Tangente |  |
| Cotangente |  |
| Secante |  |
| Cosecante |  |

**Las funciones trigonométricas y sus gráficas.**

En principio, las razones trigonométricas están definidas únicamente para ángulos agudos, es decir, para ángulos mayores a 0 y menores a radianes; sin embargo, es posible extender estas definiciones a funciones que estén definidas para cualquier número real.

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamenteConsideremos el círculo de radio 1 con centro en el origen de un plano cartesiano, y sea x la amplitud de un ángulo. Tracemos el radio CA que forma el ángulo x con la dirección positiva del eje x.

Diagrama

Descripción generada automáticamenteDefinimos el seno y el coseno del ángulo x como las coordenadas del punto A, es decir,

Podemos notar que, en el triángulo ACP, Sen x coincide con la longitud del segmento AP (cateto opuesto) y Cos x coincide con la longitud del segmento CP (cateto adyacente).

Diagrama

Descripción generada automáticamenteTambién podemos observar que, cuando el ángulo x satisface , la abscisa de A es negativa y en consecuencia también lo es Cos x. En general, los signos de Sen x y Cos x dependerán del cuadrante donde se encuentre el punto A.

Ahora, identificando el ángulo x (en radianes) con un número real, podemos considerar f(x)=Sen x y g(x)=Cos x como funciones con dominio en los números reales. Sus gráficas son las que se muestran a continuación.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

La imagen de la función f(x)=Sen x es el intervalo [-1,1]; notemos que la longitud del segmento AP de la figura anterior es menor o igual al radio del círculo, que en este caso es igual a 1. Los ceros de esta función serán los puntos de la forma

Notemos también que , es decir, la gráfica de la función seno se repite cada intervalo de longitud ; además, este último número, es el más pequeño que satisface la igualdad . Decimos que el periodo de la función seno es

De manera análoga, la función g(x)=Cos x tiene como imagen el intervalo [-1,1] y sus ceros serán los puntos de la forma

El periodo de f(x)=Cos x también es .

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

El siguiente applet te ayudará a comprender mejor el trazo y el comportamiento de las funciones anteriores: <https://www.geogebra.org/m/c7qyvdud>

Las funciones Seno y Coseno nos permiten definir las funciones trigonométricas restantes; a saber,

Función Tangente:

Función Cotangente:

Función Secante:

Función Cosecante:

Analicemos el comportamiento de la función Tangente. Primero notemos que, al tratarse de un cociente, esta función no estará definida en los ceros de la función Coseno, es decir, en los puntos de la forma

De hecho, si por ejemplo sustituimos valores de x menores y muy cercanos a , notaremos que h(x)=Tan x asignará valores positivos muy grandes, y si sustituimos valores mayores y muy cercanos a , la función asignará valores muy grandes pero negativos

|  |  |
| --- | --- |
| x | h(x)=Tan x |
| 1.55 | 48.08 |
| 1.56 | 92.62 |
| 1.57 | 1255.77 |
| 1.5707 | 10381.33 |
|  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

|  |  |
| --- | --- |
| x | h(x)=Tan x |
|  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| 1.5708 | -272241.81 |
| 1.58 | -108.65 |
| 1.59 | -52.07 |
| 1.6 | -34.23 |

Aproximación por la izquierda Aproximación por la derecha.

En este caso, la recta será una asíntota vertical para la función h(x)=Tan x, y lo análogo ocurre para las rectas , con k un número entero.

Imagen que contiene Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ahora, los ceros de la función Tangente corresponderán a los ceros de la función Seno puesto que

Finalmente notemos que el periodo de h(x)=Tan x es , es decir, para cualquier valor de x.

A continuación, se muestran las gráficas de las funciones Cotangente, Secante y Cosecante, y se da una tabla donde se resumen las características principales de las funciones trigonométricas.

Función Cotangente: i(x)=Cot x.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Función Secante: j(x)=Sec x.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Función Cosecante: k(x)=Csc x

Gráfico

Descripción generada automáticamente

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Función** | **Dominio** | **Rango** | **Periodo** |
|  |  | [-1,1] |  |
|  |  | [-1,1] |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Debemos aclarar que hemos definido las funciones trigonométricas de manera geométrica; sin embargo, existe una definición más formal que utiliza elementos de Cálculo diferencial e integral y que coincide con la nuestra, ver por ejemplo la segunda edición del libro *Calculus* de Michael Spivak, páginas 425-456.